

古代的中國數學與數學家

國珠聯

一、前言

最近外國科學家正在多方面的搜集，和研究我國古代的科學。其中以珠算發祥有關之數學，尤其為外國的學者所推崇；比利時數學家（Ulrich Libbrecht）曾撰著：「十三世紀的中國數學——秦九韶的數書九章」。介紹的內容不但很有見地，而且也很深入，因此頗令人慚惶之餘，更使從事於實用數學——珠算教育的人們興奮不已。過去凡是談及中國數學，一般人難免以冷漠的眼光視之，且也認為乏善可陳，使不知古代的中國數學，除了實用數學方面有卓越的成就，與輝煌的成果而外，在一般數學方面；諸如：三角、幾何、代數，及天文數學方面也同樣有卓越與輝煌的成就。但這一些成就與成果，差點兒被好高騖遠而懷崇洋心理的人們給遺忘。為此筆者不能不趁此用高商兩專研習會來介紹一下「古代的中國數學與數學家」，藉以激勵國人，尤其珠算界的朋友，更要喚起大家的民族信心與自尊，加緊努力於實用數學之研究，進而加以發揚光大。

二、本文

為秦九韶立傳所碰到的困難，是研究中國科學家一致的困難，就是古代社會不重視科學家，甚至加以打擊，周禮王制篇便有「以奇技奇器惑人者殺」的苛律，所以歷代科學著作得靠運氣才能留傳下來，而能名列正史的科學家更屬稀少，科學家的真面目大多得費盡心機地在筆記、類書、野史裏去盡量還原。

數學還算是被朝廷較注重的一門科學，因為官府小則丈量土地、計算賦役，大則制定曆法，都要用到數學。而這種目的所發展出來的數學較為有限。但是這個情況到宋朝就不同了。一方面社會上日益增多的數學家，他們的注意力廣闊地散佈在各種實用問題。另一方面北、西方有女真、蒙古強敵壓境，對於民生困難國家險厄的感受，逼迫着人們去努力，而掀起了應用數學的高潮。加上印刷術在此時的發達，使得宋代數學在整個中國數學史上佔斷代的最高地位。不獨是數學，我們可以見到其他科學在兩宋三百年的發展，都足夠使宋代科學稱得上是中國科學史上的黃金時代。曾經有許多位歷史、哲學家致力於「近代中國科學落後原因」的解答，如我們反向去探求科學發達的原因；是什麼型態的文化、經濟能夠導引中國科學的進展？說不定我們會對這個題目獲得新穎而較正確的答案。

秦九韶是這個黃金時代的四大數學家之一。他的歷史地位，根據科學史宋師，哈佛

的G. Sarton判斷「在中國數學家中，不但是當時，就是永久，也可算得是最傑出中的一位」這麼高的評價，幾乎是把他看成中國人智慧的象徵了。然而這末一位傑出的數學家，非但正史上沒有記載，也找不到任何有關他的直接傳記。幸好清代的樸學大師錢大昕替我們做了一點初步的考據，雖然彼時距離秦氏活躍的年代已五百五十年以上，但這點初步的考據，給予我們今日研究頗多方便（錢著十駕齋養新錄卷十四）。

秦九韶字道古，是個極為聰明機巧的人，文采風流，年青時還帶兵打過仗，模糊的歷史愈增加了幾分傳奇性，而他的數學天才又遠超過他精采的閱歷。

他的生卒年已不可考，大約在宋寧宗開禧（一二〇五）到理宗景定（一二六〇）年間。籍貫閬里靠著他的朋友陳振孫（字直齋，縣長於九韶二十歲，所著「直齋書錄解題」為中國目錄學名著）在直齋書錄題解上的幾個字告訴我們「……近得之蜀人秦九韶道古，然則九韶先世蓋魯人，而家於署者」因此我們知道他祖籍山東魯郡，一生遊歷雖多，但大部份活躍於四川。

秦九韶的少年時代，正當南宋末葉天下動盪，虜騎肆京中原。九韶家在普州（今四川安岳縣一帶）頗有田產，生活優裕，但九韶沒有因原而怠慢浮誇，這位儀表非凡、允文允武，又懷抱雄心的少年，廣結志士，豪傑，自我一方之盟。當蒙古軍進逼四川繼而圍攻九韶居住的普州城時，這位不滿冠年的英才，被推為民兵首領奮勇抗敵。然而寡不敵衆，城陷後九韶和家人及時逃出了普州，避難到江浙道湖州。

寶慶年間（一二二五—一二二八），九韶父李樵宦徙四川潼州府，九韶亦侍親回到四川（以上見宋魏了翁鶴山先生大全文集卷四，清陸心源的宋樓書志）。在江浙的日子，九韶曾趁便訪學曆法數學於掌太史之吏，以其聰明才智，未幾即遍悉星象音律算術乃至營造。回到四川以後，九韶得到機會也當起地方官吏，並從李劉（字公甫號梅亭）學駢儷詩詞，才芸更加具足，據說他曾艷事頻傳，便是在此時期。嘉熙以後（一二四〇—）四川全陷於元兵手中，九韶又出走東南，從此便不再有他入蜀的消息，而流亡於其他地方。（李梅亭集三十六）。

淳祐四年八月（一二四四）九韶以「通直郎」到任建康府，不及三日便因丁母憂而解官。此後他在宦途息影了七、八年，於寶祐年間（一二五三—一二五八）才又出仕為沿江制置司的參議官（景定建康志，通判題名、制幕題名二篇）。

九韶所賴以不朽的「數書九章」便是他在丁憂的數年中所完成。淳祐七年（一二四七）數書九章十八卷書成，他在自序上概言：「際時秋患，歷歲遙塞，不自意全於矢石之間。嘗險罹憂，荏苒十祀，心稿氣落……」道盡了一個天才數學家遭逢國家危亡天下兵亂的時刻，流徙於矢石間的悽愴；更讓我們看到他不得已挺身禦敵，其英勇的氣骨。我想到法國數學家Descartes，為了獲得閒暇研究數學而從軍，不禁感慨東西二哲境

遇的殊遇。我們從此亦看出中國智識份子以天下爲己任的傳統精神，這個就是極爲高貴的情操；但在另一方面，習科學的人不能專志於科學，未始不是中國科學的損失。

離開建康府後，我們的這位數學家，在現有文獻上有數年消息杳然。景定元年，吳潛（履齋）因忤上而罷相，放逐南方，而於景定三年（一二六二）游至廣東琼州，邂逅了在此作官的九韶，兩人志趣相交情很好。恰巧這時朝廷下詔會吳潛黨人永不錄用，九韶知琼州不過數月便因而罷官辭去。九韶旋竄往離琼不遠的梅州（今廣東梅縣），據說就在那裏終老。他的卒年當在一二六二以後。（以上宋周密著癸辛雜識及其續集）。

有潘安之貌項羽之勇的一代數學大師，就這樣匆匆地在歷史中消失，數書九章以後，我們再也欣賞不到他高度智慧的數學作品。

「數書九章」如我們所知，是「取八十一題厘爲九類，立術具草，間以圖發之九類則是大衍、天時、田域、測望、賦役、錢谷、營建、軍旅、市場。由這些篇名我們不難看出它是基於實用目的而發展的，這也是中國其他科學共有且頗爲強烈的特色（有興趣的讀者不妨由此角度去分析中西科學思想的相異點及其取向）。九韶在數學史上，所以垂世而爲人津津樂道者，大部份在當世獨步寰宇，就放到今天的數學教科書裏，也沒有能出其右的解法。

我們且按下專門的演算，來看看九韶是怎樣成就？其意義爲何？

九韶的成就中數「大衍求一術」最爲人廣知，數學史上稱之爲中國剩餘定理。它是一種以「求一」原理而用在解決不定解析（一次同餘聯立式）的問題，乃屬於現代高等解析的範圍內。即是求出一個數 x ，以 M_1 、 M_2 、 M_3 …… M_n 去除它時，所得餘數分別爲 r_1 、 r_2 、 r_3 …… r_n 。求一術在中國古代數學中山來久矣，歷代有孔明點燈、韓信點兵、隔牆算、鬼谷算、剪管術等幾種略帶神秘氣氛的名稱。秦九韶並非求一術的發明人，甚至在他以前，幾位曆算家已能很精湛地應用求一術。但是九韶在數書九章寫出了更完美更易了解的公式，將之擴展成「大衍求一」而獲得這個命題的完全說明和解決。

我們舉一個名題來簡單說明求一術。「今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？」（晉代孫子算經卷一）。

三數剩二表示 X 以三除餘二，亦即 $X-2$ 能破 W 整除，在現代數學中我們定義「 X 與二對三爲同餘」，此題即在求三個同餘式的公解。

古代對這個名詞的算法有多種歌訣。除了那篇「書話」所引的「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半日，除百零五便得之」外，尙有一首較普遍者「三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇，七度上元重相會，寒食清明便可知。」寒食到清明共 105 天，故「上元」「寒食清明」乃暗示 15 和 105 兩數。歌訣的意思是這樣的：所求數被

除了之餘數 2 去乘 70、被 5 除之餘數 3 去乘 21、被 7 除之餘數 2 去乘 15，所得三數相和— $2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$ ，233 即所求解之一（這題目在正整數系可有無窮個解），3、5、7 之最小公倍數為 105，以 233 增或減 105 之倍數均亦為解，而其最小解則為 23。

這個題目的關鍵就在選擇 70，21，15 這三個數，這便是求一之所在了。我們不難瞭解這三數應由 5×7 （35）， 3×7 （21）， 3×5 （15），或其倍數而來，爲了求一則 35 應以 2 倍計得 70—70 以 3 除，數才得一，其他 5 除 21，7 除 15 餘數均得一。找出這三個數字就是此問題的主要方法（此處筆者以歌訣內的解答倒推來說明，正式的解法讀者可參考李約瑟「中國之科學與文明」卷 19，及數論的同餘理論）。

求一術在現存的古數學書中，首先出現在第四世紀的孫子算經，但過了將近九個世紀，才有秦九韶將之發揚光大而作完全清楚的解說，這以後，中國的數學家才能廣泛地參加演算，使大衍求一術蔚爲中國數學的最大特色。秦氏的後起者，設計了更多的問題，以大衍求一解之，因此九韶以後的大小數學家，莫不以解此問題爲數學家的基本能力。西元一八五二年，中國科學西傳至歐洲的早期功臣偉烈。亞力（Alexander Wylie）出版「中國算術漫談」一書，首次向歐洲人介紹大衍求一術。歐洲數學家在欣賞讚嘆之餘，齊把大衍求一稱作「中國剩餘定理」（Chinese Remainder Theorem）。至此大衍求一術成爲數論，近代抽象代數中最重要的定理之一，其功德得以圓滿。

數書九章是從實用目的出發的，大衍求一術雖然完成了抽象數學上的成就，但它底本源仍是落實於實用目的。大衍求一最大的意義，乃在曆法上的應用，以求得更準確的近似值，來校正日差。

古代中國制定曆法有兩個基本的周期。一個是節氣（歲實）一個是朔日（朔實）。一年有二十四節氣，一個節氣等於太陽在黃道上行黃經十五度（廿四節氣共三百六十度），每一節氣平均爲十五日點二一八，每半月爲十四日點七六五。若僅以節氣爲根據的曆法，則不能預示望月（月圓）；若僅以太陰月的長爲根據的曆法，則無法預知四季雨露。而前者的準確關係着民間文化和宗教儀式的維持，後者則關係着經濟生產，因此必須在兩周期間取得協調。協調的方法是將年和月的奇零數安排成閏月、閏年，以作彼此間的緩衝。若一種曆法設計得不妥當，奇零數的計算無法接近真正周期日數的奇零，則剛開始也許相當適當，但若干年後近似值拉開，便失去了原有的準確性，這將給國家社會帶來無盡的困擾。中國歷史改曆在百次以上，一方面固然說明了曆算在各朝代間普遍發達，一方面也告訴我們標準曆法制定的不易，另外可注意的一點，改曆有時候是爲了政治上的方便。

大衍求一術用在曆法的制定上，第一可以決定奇零部份的近似值以安排閏月、閏年

。第二萬一曆法失去準確，可以向上倒推若干年，以求當年節氣、朔月相同的起點。特別是後者，在史學和考古學上相常用處。數書九章第一、三卷便是數題有關「節氣」「閏」的計算。

秦九韶以前幾位優秀的曆法制定者，也都使用了求一術，只不過他們諳習方法，但不曾明白地說出來。筆者在此舉一小段曆算史為例，讀者便可很快瞭解求一術的功用。

漢代行三統曆（自 B. C. 104 起），以 $12\frac{7}{19}$ 表一年的月數，奇零的 $\frac{7}{19}$ 以十九年中有七個閏年安排之。到了北朝後魏的正光曆（公元五二二），應用求一術把奇零算至更準確的近似值，為 $\frac{116}{505}$ ，所以五〇五年內應有一八六個閏年。北涼元始曆、劉宋大明曆也都是以三統曆為基礎，用求一術加以演算，前者得奇零 $\frac{211}{600}$ ，後者 $\frac{114}{391}$ 故分別以六百年內二二一個閏年，三九一年內一四四閏年安排之。總之，後三曆均是以求一術改訂自三統曆，我們可簡單從下列三式看出來、 $505 \times 7 - 186 \times 19 = 1$ ； $600 \times 7 - 221 \times 19 = 1$ ； $391 \times 7 - 144 \times 19 = 1$ 。

在充滿智慧的數書九章裏，成就當然不止於大衍求一術，限於篇幅，且舉其犖犖大著者。

對於解高次方程式，秦九韶頗為拿手，在數書九章中甚至有一題方程式高達十次。高次數字方程式根之近似值解法，在中國數學史上亦久有淵源。世界數學史的高次方程論，十幾世紀來一直是由中國長期領導。可考的古籍中，第七世紀的王孝通首先解答過三次方程式，而西方遲至第十六世紀，才完成三次方程的解法，落後中國幾乎千年。

九韶進一步地解答四次方程式，在他之前，只有賈憲於西元一二〇〇年解過四次方程，但那是特例。九韶的解法可用於任何四次方程（十次的那題也是特例）。其中一題較著稱者，可以現在的式子表成：

$$-X^4 + 763200 X^2 - 40642500000 = 0$$

九韶所用的增乘開方法，五百五十多年後完全重現於歐洲的韋芬尼（Paoloy Rvffini 1802）和賀納（W. G. Horner 1819）。至今在代數學教科書中，仍保有它的地位。

幾何學上，他曾發明「三斜求積術」與我們現在已知三邊，求任意三角形面積的公式相同。

又如他繼沈括（一〇三〇—一〇九三）對於推算彈珠、磚石、酒桶堆積而成的體積（括積術）；更深入地在級數和排列組合的範圍中去發揚光大。

探研中國科學史，我們常可發現古代中國科學家的某些成就，常將西方遠遠拋至數百甚至千年後。明以前的中國科學比起同時代的歐西、中東、印度諸文明，即使不是超過，至少也平分秋色。但明以後中國科學逐漸走入黑暗的深淵，以致到後來全盤地接受西方科學，更甚者，中國人都像是全忘了祖先曾經輝煌的科學成就，到今天却由外國人

倒回頭來提醒我們。

對於近代中國科學運動的挫折，科學史家願意和歷史學家合作，去找出癥結，反省文化的不足。對於中國科學史本身的研究，從事者當貢獻其科學和史學的訓練，去為那一群被遺忘的科學家重建地位，還它一個本來面目。這個工作的意義絕不只是在復揚古人。而是——以古代中國科學家的智慧、勤奮和成就來振奮這一代中國人的自信心，而使之聞後興起，覺悟媚外崇洋的殖民式心理；更以古代中國的世界性地位，去鍼誠現代以及未來的中國科學家作更大覺醒，更加努力，期在世界科學史甚至珠算之學術領域中，再開一光芒萬丈的中國時代。