

九、《九章》算術對於古今數學之貢獻

“從事珠心算教育者，應該了解中國數學，首先應先對自己的數學歷史有深刻的認識，爲此必須要先對《九章》與《劉注》有確切了解

美國克萊因(M. Kline)的《古今數學思想》一書，在國際上被認爲是最好的一本數學史專著。在該書作者自序的篇首，作者引用了 H. Poincaré 的一句名言：

如果我們想要預見數學的將來，適當的途徑是研究這門科學的歷史和現狀。

筆者基本上同意該書作者對數學史的態度與觀點，尤其同意所引用的 Poincaré 那句名言。遺憾的是，克萊因把數學的歷史和現狀實質上完全局限於西方的數學。爲此，筆者認爲爲了澄清事實，對 Poincaré 的名言，應該補充一句作爲注解：

特別是研究這門科學在中國的歷史和現狀。

出現於秦漢時代的《九章算術》與魏晉時期的《劉徽注》(以下簡稱《九章》與《劉注》)，是數學在中國最早、最完整的歷史記錄。《九章》與《劉注》，是研究數學在中國的歷史和現狀的鑰匙。

克萊因一書的正確書名，事實上應該是《西方古今數學思想》。在全書 51 章中，只有標題爲印度和阿拉伯的數學的第 9 章才涉及到非希臘傳統的東方數學。盡管如此，在該章之首作者還提出下面的看法：

在數學史上，希臘人的後繼者是印度人，雖然印度的數學只是在受到希臘數學成就的影響後才頗爲可觀。

只要對中國的傳統數學略有所知，即知此語之謬。但是，我們不能輕以責己，而嚴以責人。造成這種局面的原因應該返求諸己。如果我們對自己數學的歷史了解不多、認識不深，也不向西方的學者多作介紹，又如何能要求一位西方學者，克服文字上難以逾越的困難而對中國的傳統數學在數學發展歷史上的地位作出正確的評價。

作為一名中國的數學工作者，首先應對自己的數學歷史有深刻的認識，為此必須首先對《九章》與《劉注》有確切的了解。

數系統的每一步完善都是數學進展的重要標誌。無理數的發現，曾在西方引起了數學危機。負數與實數概念，則在西方很晚才得到確認。克萊因在《古今數學思想》中曾經說過：

負數雖然通過阿拉伯人的著作傳到歐洲，但16世紀和17世紀的大多數數學家並不承認它們是數。

克萊因又說：

數學史上最使人驚奇的事實之一，是實數系的邏輯基礎竟遲至19世紀後葉才建立起來。在那時以前，即使正負有理數與無理數的最簡單性質也沒有邏輯地建立，連這些數的定義也還沒有。……這一事實說明數學的進展是怎樣地不合邏輯。

然而在我國，遠在《九章》之前就已有着舉世無雙的位值制十進制記數法。至遲在《九章》中，就已記載着有理數與正負數的各種運算規則。不僅如此，對於古代希臘認為迷惑不可理解的開根不盡之數，在《九章》與《劉注》中直截了當地“以面命之”，給出了獨立成數的定義與某些運算法則。事實上，通過十進不盡小數的引入，以及開方與圓周率的極限計算，《九章》與《劉注》

實際上已完成了整個實數系統。所謂實數系統的嚴密邏輯基礎，完全可以通過樸素的十進制小數來完成，而無需借助於 19 世紀才引入的 Dedekind 分割之類迂迴曲折的概念。

數學研究現實世界中的數量關係與空間形式。在中國的傳統數學中，數量關係與空間形式往往是形影不離並肩地發展着的。但在以歐幾里得為代表的希臘傳統裏，則幾何學獨立於數量關係而以單純研究空間形式的格局發展着。在《古今數學思想》中克萊因說：

代數雖在埃及人和巴比倫人開創時是立足於算術的，但希臘人卻顛覆了這個基礎而要求立足於幾何。

希臘傳統的這種排斥數量關係於幾何之外的研究方式可能給數學包括幾何帶來了嚴重後果。在歐洲長時期黑暗的中世紀中，數學的發展陷於停頓，幾何也是如此。筆者懷疑歐幾里得那種單純依靠艱澀而迂曲地進行的推理方式，正是造成這種停頓的重要原因之一。不論筆者的懷疑有多少真實性，一個無可否認的事實是：中世紀時阿拉伯世界，無疑是由於東方的影響，已經充分掌握了當時數量關係方面的許多知識與方法，可能還有不少自己的創造。通過回教、蒙古與土耳其的西侵，以及十字軍的東征，這種知識與方法傳入了歐洲，前面所說負數的傳入正是其中之一。這種傳入無疑促成了中世紀以後歐洲以數量關係為主而與歐幾里得傳統大相徑庭的種種發明創造：小數，對數，符號，以至三次、四次方程的解法，等等。

與以歐幾里得為代表的希臘傳統相異，我國的傳統數學在研究空間形式時着重於可以通過數量來表達的那種屬性，幾何問題也往往歸結為代數問題來處理解決。面積、體積與圓周率的計算

導致無理數概念的引入，相當於 Cavalieri 原理的劉祖原理的發現，以及極限方法的創立。把幾何問題化為代數問題的做法，則導致方程、天元等概念的引入，多項式運算與消元方法的建立，以及各種方程的系統解法，並使幾何代數化有途可循，有法可依。17 世紀 Descartes 解析幾何的發明，正是中國這種傳統思想與方法在幾百年停頓後的重現與繼續。

《九章》與《劉注》，正是集中國這種傳統思想與方法於大成、繼往開來的傳世傑作。

筆者曾在多種場合，指出我國的傳統數學有它自己的體系與形式，有着它自身的發展途徑與獨到的思想體系，不能以西方數學的模式生搬硬套。我國的古代數學基本上遵循了一條從生產實踐中提煉出數學問題，經過分析綜合，形成概念與方法，並上升到理論階段，精煉成極少數一般性原理，進一步應用於多種多樣的不同的問題。從問題而不是從公理出發，以解決問題而不是以推理論證為主旨，這與西方之以歐幾里得幾何為代表的所謂演繹體系旨趣迥異，途徑亦殊。由於形形色色的問題往往歸結為方程求解，因而方程求解就成為中國傳統數學《九章》以來發展中的一條主線。這與西方數學之以定理求證為中心者正相對照。《九章》與《劉注》不僅提出了線性聯立方程組的一般解法以及相伴而生的正負數概念，也給出了如何由開方與勾股類問題導致二次方程的範例。為此後千多年方程不斷發展開其先河。諸如方程之類如何由簡到繁，由特殊到一般，由具體到抽象的演變過程，從研讀《九章》與《劉注》，可以得其梗概。

研究《九章》與《劉注》，不僅對於數學的歷史，即使對於數學的現狀，也可提高認識。

我國傳統數學在從問題出發以解決問題爲主旨的發展過程中建立了以構造性與機械化爲其特色的算法體系，這與西方數學以歐幾里得《幾何原本》爲代表的所謂公理化演繹體系正好遙遙相對。《九章》與《劉注》是這一機械化體系的代表作，與公理化體系的代表作歐幾里得《幾何原本》可謂東西輝映，在數學發展的歷史長河中，數學機械化算法體系與數學公理化演繹體系曾多次反復互爲消長，交替成爲數學發展中的主流。肇始於我國的這種機械化體系，在經過明代以來近幾百年的相對消沉後，由於計算機的出現，已越來越爲數學家所認識與重視，勢將重新登上歷史舞台。《九章》與《劉注》所貫串的機械化思想，不僅曾經深刻影響了數學的歷史進程，而且對數學的現狀也正在發揚它日益顯著的影響。它在進入二十一世紀後在數學中的地位，幾乎可以預卜。

總之，要預見數學的將來，不能不研究《九章》與《劉注》所蘊涵的深邃的思想在數學發展過程中的歷史功績，也不能不正視正在嶄露頭角的這種思想對數學現狀的影響。本書對《九章》與《劉注》從各個角度作了全面的分析與介紹。書中不乏創見，對《九章》與《劉注》中無理數理論的闡發即是其中之一。筆者希望讀者通過此書，不僅對中國傳統數學在古今數學思想中的地位會有一個清晰的認識，而且能對數學將來的發展得出自己的結論。