

開平方法

1. 開平方法的意義

某數本身自乘若干次後，所得的積數，叫做某數的乘方數或乘幂。自乘一次的積數叫做平方數。如；某數為8，即 $8 \times 8 = 64$ ，這64是8的二次方，又叫做8的平方數。

而反過來求，64是何數的平方數的方法叫做開平方。如； $64 = 8^2$ ，而這8叫做64的平方根。

開方是乘方的反運算，如 $\sqrt{64} = 8$ ， $\sqrt{\quad}$ 是開方的符號。

2. 開平方法的種類

今設平方根的第一商為a，第二商為b，其計算式如右： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。求平方根，依構成上面計算式的數理，循照平方式的順序計算，其算

法可分為下列二種：

(1) 由 $a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = 2ab + b^2$

如要從其餘式的 $2ab + b^2$ 求b時，可用已知數a的二倍數即 $2a$ 除餘式的方法。此法又可分為二商法、倍商法、變商法等。

(2) 求b時， $2a$ 分為2與a的方法。此法可分做定數法（平方半九九口訣，半口訣法）、定數法別法等。以珠算求平方根，通常使用定數法，或定數法別法做計算較為方便。

3. 定數開平方法

定數開平方法是我國珠算獨有的算法。與外來數學算法不同的特點是，初商平方減（ $-a^2$ ）後，以定數2來除其餘數（商除法是以0.5乘，歸除法是以2除），如此次商以下各商凡要做平方減時，均需減去平方數的 $\frac{1}{2}$ 數（即半數）即可。為要適應此計算，須應用乘法口訣的半數口訣。這口訣謂；平方半九九口訣（又謂半口訣）。

一、平方半九九口訣

一一得半 (0.5)

二二得二 (2)

三三得四半 (4.5)

四四得八 (8)

五五十二半 (12.5)

六六一十八 (18)

七七二十四半 (24.5)

八八三十二 (32)

九九四十半 (40.5)

二、計算順序

(1) 分段：以小數點作標準，每二位數分成一段。經分段後可預知平方根是幾位的整數（或帶小數、小數）。

(a) 整數……由個位向左邊，每二位為一段，如最左邊數目僅為一位數時仍成為一段，即亦成為一個平方根。各例如下：

<例一> $\sqrt{46,090,521} = 6,789$
← ← ← ←
四 三 二 一 (四位平方根)

<例二> $\sqrt{3,200,521} = 1,789$
← ← ← ←
四 三 二 一 (四位平方根)

(b) 帶小數……以小數點作基準，整數部份如例一，由個位向左邊，每二位為一段，而小數部份亦以小數點為基準，向右邊分段，每二位為一段，然一個段即為一個平方根。

<例三> $\sqrt{4,609.0521} = 67.89$
← ← → →
 小小 (整數二位)
二 一 一 二

<例四> $\sqrt{320.0521} = 17.89$
← ← → →
 小小 (整數二位)
二 一 一 二

(c) 小數……由小數第一位向右，每二位為一段，成爲一個小數平方根。

<例五> $\sqrt{0.46090521} = 0.6789$
 $\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \text{小} & \text{小} & \text{小} & \text{小} \\ - & \text{二} & \text{三} & \text{四} \end{array}$ (小數四位數的根)

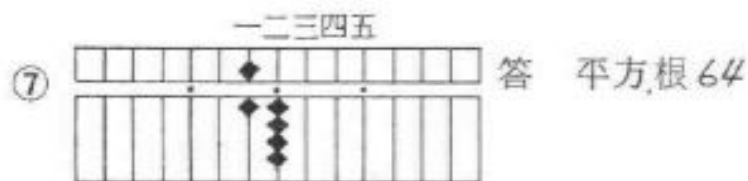
<例六> $\sqrt{0.03200521} = 0.1789$
 $\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \text{小} & \text{小} & \text{小} & \text{小} \\ - & \text{二} & \text{三} & \text{四} \end{array}$ (小數四位)

<例七> $\sqrt{0.00622521} = 0.0789$
 $\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \text{小} & \text{小} & \text{小} & \text{小} \\ - & \text{二} & \text{三} & \text{四} \end{array}$ (小數四位)

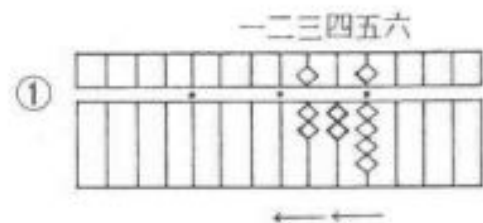
<例八> $\sqrt{0.00035721} = 0.0189$
 $\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \text{小} & \text{小} & \text{小} & \text{小} \\ - & \text{二} & \text{三} & \text{四} \end{array}$ (小數四位)

<例九> $\sqrt{0.00000841} = 0.0029$
 $\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \text{小} & \text{小} & \text{小} & \text{小} \\ - & \text{二} & \text{三} & \text{四} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0. & 0 & 0 & 29 \end{array}$ (小數四位)

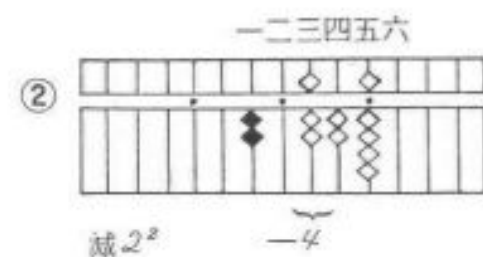
- (2) 由左邊的段裏，依平方九九求出第一位商數（即首位平方根），置於該分段的左檔（該分段若是二位數時則置於該二位數的左檔，若一位數時，即置於該一位數的左二位檔上。）而減去第一位商數（即首位根）的平方數。——平方減
- (3) 餘數（即第一位根的右邊各數目）以破頭乘法乘 0.5 然改爲半數。——乘 0.5
- (4) 以第一位根作爲法數，除由(3)的計算所得的「半數」即得次位根（第二位商數），將其置於首位根（第一位商數）的右邊。——既商除
- (5) 第二位根（次位根）乘以第一位根，其積數由第二位根的右邊一、二檔減去。——既商除
- (6) 第二位根的右邊二、三檔減去第二位根的平方半九九數目。——減半口訣
- (7) 再以第一、第二位根爲法數，除既知商（已知根



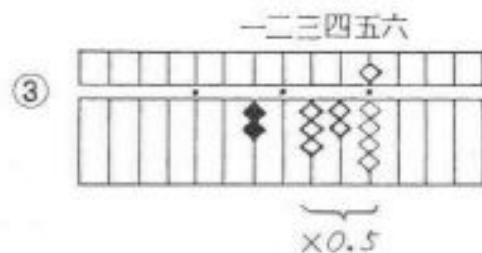
<例二> $\sqrt{729} = 27$



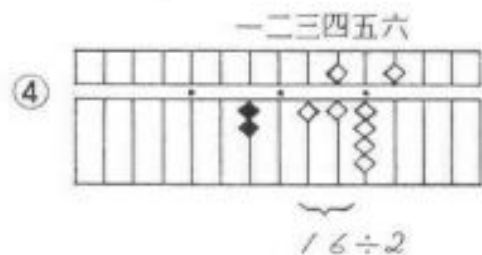
分段...分爲二段，左段 7 之平方根爲 2，置於左段之左邊第二位檔（即一檔）上。（如圖②）



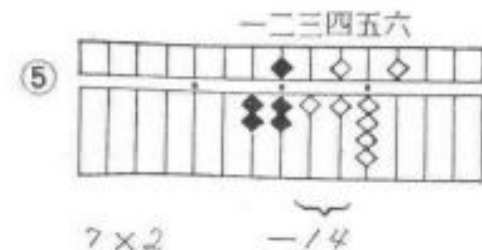
平方減...左段 7 減第一位根 2 的平方數 4，餘數爲 329。（如圖③）



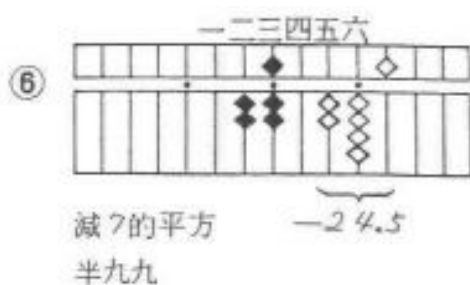
$\times 0.5$...餘數 329 \times
0.5 改爲半數
1645。（如圖④）



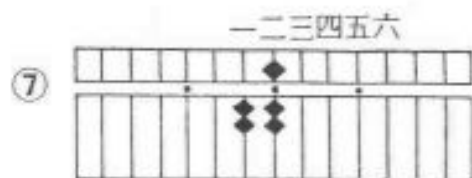
既商除...餘數 16 除以第一位平方根 2，可得商 7（即第二位根），置於第一位根的右邊。（如圖⑤）



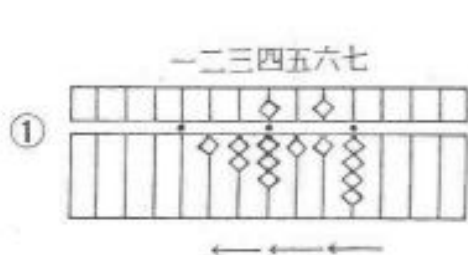
既商除...第二位根 7 乘以第一位根 2，積數 14 由三、四檔減去，餘數爲 245。（如圖⑥）



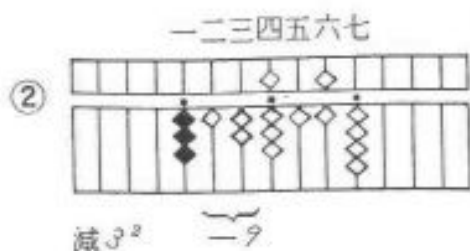
減半口訣…第二位根7的
右邊第二、三、
四檔減去第
二位根7的平
方半九九,24.5
得平方根27。
(如圖⑥)



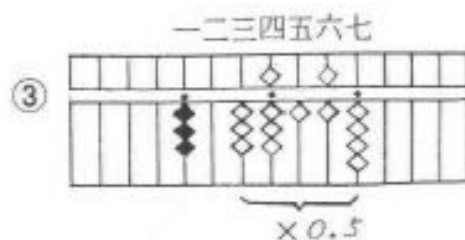
<例三> $\sqrt{128,164} = 358$



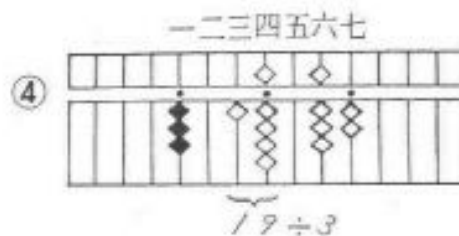
分段…分爲三段，左段
12的平方根爲
3，置於左段之
左邊，一的檔上。
(如圖②)



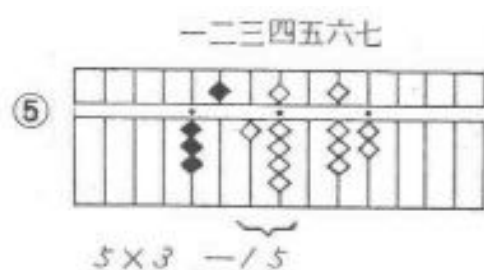
平方減…左段12減第一
位根3的平方數
9，餘數爲如圖
③ 38164。



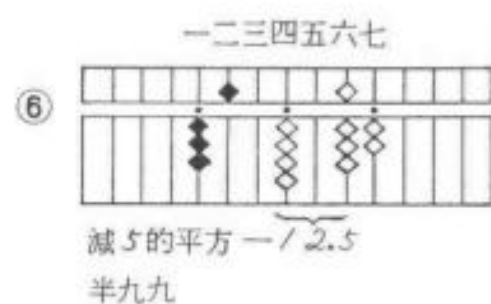
$\times 0.5$ …餘數38164 \times
0.5，改爲半數
19082。(如
圖④)



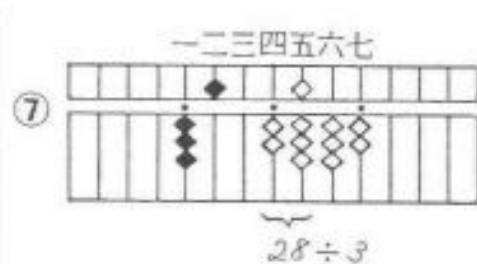
既商除…餘數的前二位數
19除以第一位
根3，得商數5
爲第二位根，置
於第一位根的右
邊。(如圖⑤)



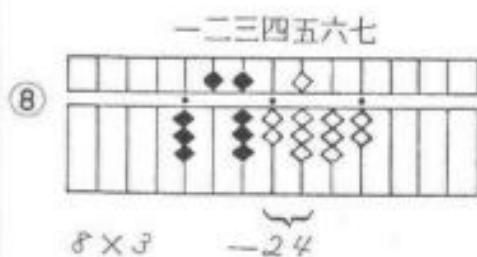
既商除... 第二位平方根 5
 乘以第一位平方
 根 3，積數 / 5
 由三、四檔減去
 ，餘數為 4082
 。 (如圖⑥)



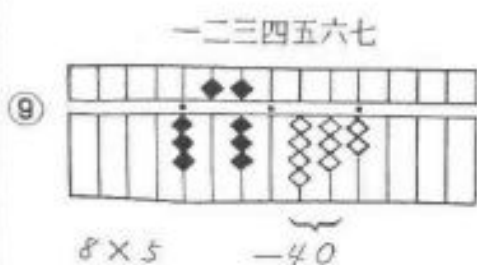
減半口訣... 第二位根 5 的
 右邊四、五、
 六檔減去第二
 位根 5 的平方
 半九九，/ 2.5
 。餘數為
 2832。 (如
 圖⑦)



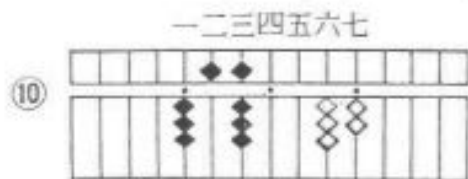
既商除... 餘數的前二位數目
 28 除以第一位根
 3，可得商 8 為第
 三位根，置於第二
 位根 5 的右邊。
 (如圖⑧)



既商除... 餘數 28 減第三位
 根 8 與第一位根 3
 的相乘積 24，餘
 數成爲 432。
 (如圖⑨)

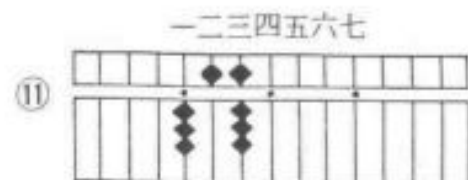


既商除... 餘數 43 減第三位
 根 8 與第二位根 5
 的相乘積 40，餘
 數爲 32。(如圖
 ⑩)



減8的平方 半九九
—32

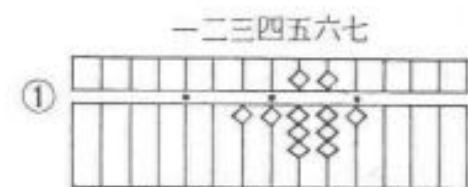
減半口訣…第三位根8的右邊六、七檔減去第三位根8的平方半九九，32。無剩餘。圖⑩



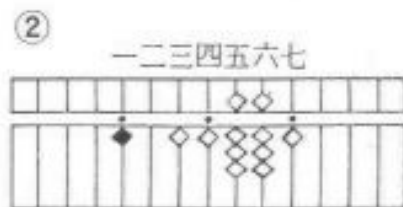
得平方根358。
答 358

<例四> $\sqrt{11,881} = 109$

11,881 是五位的單數，最前面的1上面加一個0記號，成為011881的六位數。分為三段，即為01 18 81的三段，平方根為三位。

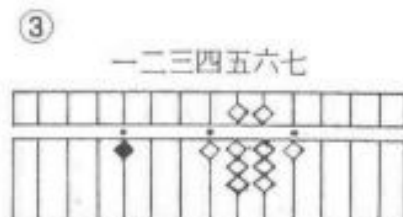


分段…成爲三段。首段01的平方根爲1，置於檔一上。如圖②



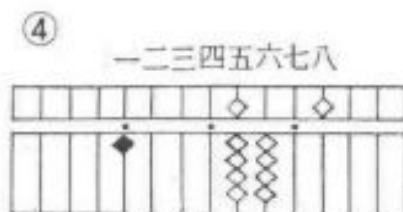
減1² —1

平方減…左段01減第一位平方根1的平方數1，餘數爲1881。（如圖③）



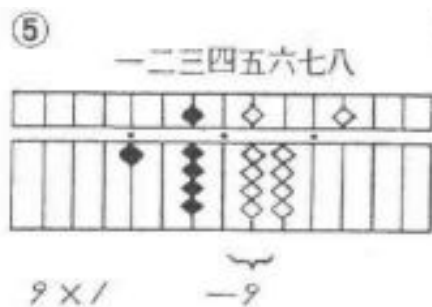
×0.5

×0.5…餘數1881×0.5改爲半數9405。（如圖④）

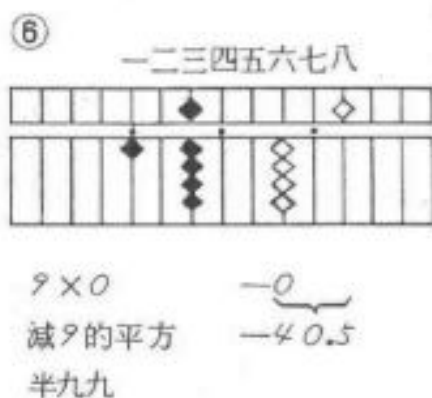


÷9

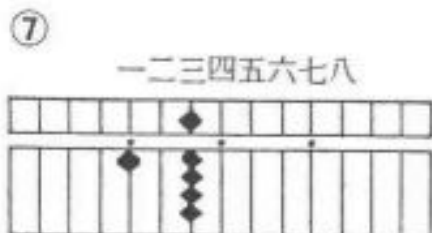
既商除…餘數首位的9除以第一位根1，得商數9，置於第一位根的右二檔上（即檔三）。因第二位根位數是空位，即已求出之9應爲第三位根。圖⑤



既商除...第三位根9乘以第一位根1，得積數9由檔五上減去，餘數成爲405。(如圖⑥)



減半口訣...第三位根9乘以第二位根0，指頭移至右邊檔大，又第三位根9自乘，得平方半九九40.5，由檔六、七、八檔減去40.5。無剩餘，得平方根爲109。(如圖⑦)



答 平方根109

【習題 一一三】

開平方計算...整數根 ①

(1) $\sqrt{1,225} =$

(11) $\sqrt{148,225} =$

(2) $\sqrt{2,304} =$

(12) $\sqrt{509,796} =$

(3) $\sqrt{3,481} =$

(13) $\sqrt{874,225} =$

(4) $\sqrt{4,489} =$

(14) $\sqrt{734,449} =$

(5) $\sqrt{5,776} =$

(15) $\sqrt{900,601} =$

(6) $\sqrt{144} =$

(16) $\sqrt{399,425} =$

(7) $\sqrt{289} =$

(17) $\sqrt{461,041} =$

(8) $\sqrt{625} =$

(18) $\sqrt{649,636} =$

(9) $\sqrt{961} =$

(19) $\sqrt{819,025} =$

(10) $\sqrt{529} =$

(20) $\sqrt{491,401} =$

開平方計算…整數根 ②

$$(21) \sqrt{47,089} =$$

$$(22) \sqrt{23,409} =$$

$$(23) \sqrt{97,344} =$$

$$(24) \sqrt{80,089} =$$

$$(25) \sqrt{47,961} =$$

$$(26) \sqrt{35,721} =$$

$$(27) \sqrt{38,416} =$$

$$(28) \sqrt{11,664} =$$

$$(29) \sqrt{41,616} =$$

$$(30) \sqrt{94,872} =$$

$$(31) \sqrt{40,755,456} =$$

$$(32) \sqrt{17,522,596} =$$

$$(33) \sqrt{53,363,025} =$$

$$(34) \sqrt{65,496,649} =$$

$$(35) \sqrt{29,658,916} =$$

$$(36) \sqrt{48,832,144} =$$

$$(37) \sqrt{15,194,404} =$$

$$(38) \sqrt{84,787,264} =$$

$$(39) \sqrt{50,908,225} =$$

$$(40) \sqrt{30,096,196} =$$

開平方計算…整數根 ③

$$(41) \sqrt{30,019,441} =$$

$$(42) \sqrt{86,192,656} =$$

$$(43) \sqrt{43,309,561} =$$

$$(44) \sqrt{12,439,729} =$$

$$(45) \sqrt{84,695,209} =$$

$$(46) \sqrt{4,188,304} =$$

$$(47) \sqrt{1,008,016} =$$

$$(48) \sqrt{8,934,121} =$$

$$(49) \sqrt{3,968,064} =$$

$$(50) \sqrt{1,946,025} =$$

$$(51) \sqrt{2,489,810,404} =$$

$$(52) \sqrt{3,530,498,724} =$$

$$(53) \sqrt{2,499,900,001} =$$

$$(54) \sqrt{7,586,758,404} =$$

$$(55) \sqrt{8,106,301,225} =$$

$$(56) \sqrt{1,549,052,164} =$$

$$(57) \sqrt{2,305,632,289} =$$

$$(58) \sqrt{115,347,600} =$$

$$(59) \sqrt{360,202,441} =$$

$$(60) \sqrt{268,271,641} =$$